4-Operações de Matrizes

Laura Goulart

UESB

30 de Outubro de 2018

4.1 - Adição de matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $m \times n$, a soma das matrizes A e B, denotado por $A + B$, é uma matriz de ordem $m \times n$ cujos os elementos são somas dos correspondente de A e B, ie,
$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $m \times n$, a soma das matrizes A e B, denotado por $A + B$, é uma matriz de ordem $m \times n$ cujos os elementos são somas dos correspondente de A e B, ie, $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Exemplo (4.1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 8+6 & -3+5 \\ 4+2 & -2+5 & 5+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 2 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

A1) [Comutativa] $A + B = B + A$

A1) [Comutativa] $A + B = B + A$

A2) [Associativa] $A + (B + C) = (A + B) + C$

4.1.1-Propriedades da adição

A1) [Comutativa] $A + B = B + A$

A2) [Associativa] $A + (B + C) = (A + B) + C$

A3) [Elemento Neutro (Matriz nula)] $A + 0 = A$

A1) [Comutativa] $A + B = B + A$

A2) [Associativa] $A + (B + C) = (A + B) + C$

A3) [Elemento Neutro (Matriz nula)] $A + 0 = A$

A4) [Elemento oposto] $A + (-A) = 0$

4.2-Subtração de matrizes

A existência da matriz oposta permite definir a diferença de matrizes como um caso particular da soma de matrizes, ie, $A - B = A + (-B)$.

4.2-Subtração de matrizes

A existência da matriz oposta permite definir a diferença de matrizes como um caso particular da soma de matrizes, ie, $A - B = A + (-B)$.

Exemplo (4.2)

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

4.3-Multiplicação por escalar

Dada a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, a multiplicação da matriz por um número real α, denotado por $\alpha \cdot A$, é a matriz formad pelos elementos de A multiplicados por α, ie $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$.

4.3-Multiplicação por escalar

Dada a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, a multiplicação da matriz por um número real α, denotado por $\alpha \cdot A$, é a matriz formad pelos elementos de A multiplicados por α, ie $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$.

Exemplo (4.3)

$$5 \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 4 & 5 \times (-2) & 5 \times 1 \\ 5 \times 3 & 5 \times (-5) & 5 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 5 \\ 15 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar

ME1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Propriedades da Multiplicação por Escalar

ME1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

ME2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Propriedades da Multiplicação por Escalar

ME1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

ME2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

ME3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

Propriedades da Multiplicação por Escalar

ME1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

ME2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

ME3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

ME4) $1 \cdot A = A$

Exercício de Fixação

Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule $X = 3A - 2B + 4C$.

4.4-Multiplicação de Matrizes

Primeiramente, devemos entender que o produto de uma matriz por outra NÂO é determinado pelo produto de seus elementos correspondentes.

4.4-Multiplicação de Matrizes

Primeiramente, devemos entender que o produto de uma matriz por outra NÂO é determinado pelo produto de seus elementos correspondentes.

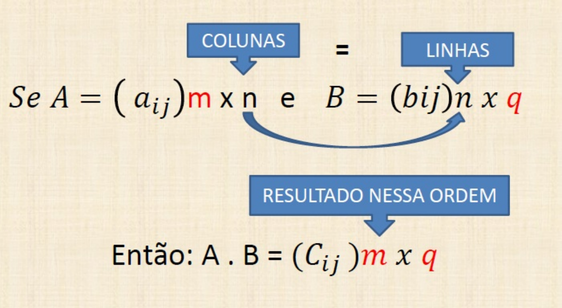
Observação

Só podemos efetuar o produto de duas matrizes A *e* B, *denotado por* AB, *se o número de* **colunas** *de* A *for igual o número de* **linhas** *de* B. *Além disso, o resultado será uma matriz com o número de* **linhas** *de* A *e o número de* **colunas** *de* B.

Primeiramente, devemos entender que o produto de uma matriz por outra NÂO é determinado pelo produto de seus elementos correspondentes.

Observação

Só podemos efetuar o produto de duas matrizes A e B, denotado por AB, se o número de **colunas** *de A for igual o número de* **linhas** *de B. Além disso, o resultado será uma matriz com o número de* **linhas** *de A e o número de* **colunas** *de B.*



O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times q}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times q}$, em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A vezes os elementos da j-ésima coluna de B.

O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times q}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times q}$, em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A vezes os elementos da j-ésima coluna de B.

Exemplo (4.4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times q}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times q}$, em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A vezes os elementos da j-ésima coluna de B.

Exemplo (4.4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; e \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Para entendermos melhor a definição de multiplicação de matrizes, vamos fazer o passo-a-passo deste exemplo:

- Soma-se a 1a. linha de A vezes a 1a. coluna de B.

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{array}{c} c_{11} \\ \begin{bmatrix}\boxed{1\cdot(-1)+2\cdot 4} & \\ & \end{bmatrix}\end{array}$$

- Soma-se a 1a. linha de A vezes a 1a. coluna de B.

$$C=\begin{bmatrix}\boxed{1 \quad 2}\\ 3 \quad 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\2\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{array}{c} c_{11} \\ \begin{bmatrix}\boxed{1\cdot(-1)+2\cdot 4} & \\ & \end{bmatrix}\end{array}$$

- Soma-se a 1a. linha de A vezes a 2a. coluna de B.

$$C=\begin{bmatrix}\boxed{1 \quad 2}\\ 3 \quad 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\begin{matrix}-1\\4\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{array}{cc} & c_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 4 & \boxed{1\cdot 3+2\cdot 2} \\ & \end{bmatrix}}\end{array}$$

- Soma-se a 2a. linha de A vezes a 1a. coluna de B.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2 \\ \underbrace{\boxed{3.(-1)+4.4}}_{c_{21}} & \end{bmatrix}$$

- Soma-se a 2a. linha de A vezes a 1a. coluna de B.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2 \\ \underbrace{\boxed{3.(-1)+4.4}}_{c_{21}} & \end{bmatrix}$$

- Soma-se a 2a. linha de A vezes a 2a. coluna de B.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2 \\ 3.(-1)+4.4 & \underbrace{\boxed{3.3+4.2}}_{c_{22}} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$C = \begin{pmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3+16 & 9+8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Logo,

$$C = \begin{pmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3+16 & 9+8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

Logo,
$$C = \begin{pmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3+16 & 9+8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}.$$
Agora, observe o que acontece se calcularmos BA.

Logo,

$$C = \begin{pmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3+16 & 9+8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

Agora, observe o que acontece se calcularmos BA.

$$B.A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).1+3.3 & (-1).2+3.4 \\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$C = \begin{pmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3+16 & 9+8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

Agora, observe o que acontece se calcularmos BA.

$$B.A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1).1+3.3} & \boxed{(-1).2+3.4} \\ \boxed{4.1+2.3} & \boxed{4.2+2.4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $AB \neq BA$.

Logo,

$$C = \begin{pmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3+16 & 9+8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

Agora, observe o que acontece se calcularmos BA.

$$B.A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).1+3.3 & (-1).2+3.4 \\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $AB \neq BA$.

Ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

M1) [Associativa] $A(BC) = (AB)C$

4.4.1 - Propriedades da Multiplicação de Matrizes

M1) [Associativa] $A(BC) = (AB)C$

M2) [Distributivas]

- $A(B + C) = AB + AC$

4.4.1 - Propriedades da Multiplicação de Matrizes

M1) [Associativa] $A(BC) = (AB)C$

M2) [Distributivas]

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

4.4.1 - Propriedades da Multiplicação de Matrizes

M1) [Associativa] $A(BC) = (AB)C$

M2) [Distributivas]

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

M3) [Elemento neutro para matrizes quadradas(matriz identidade)] $AI_n = A = I_nA$.